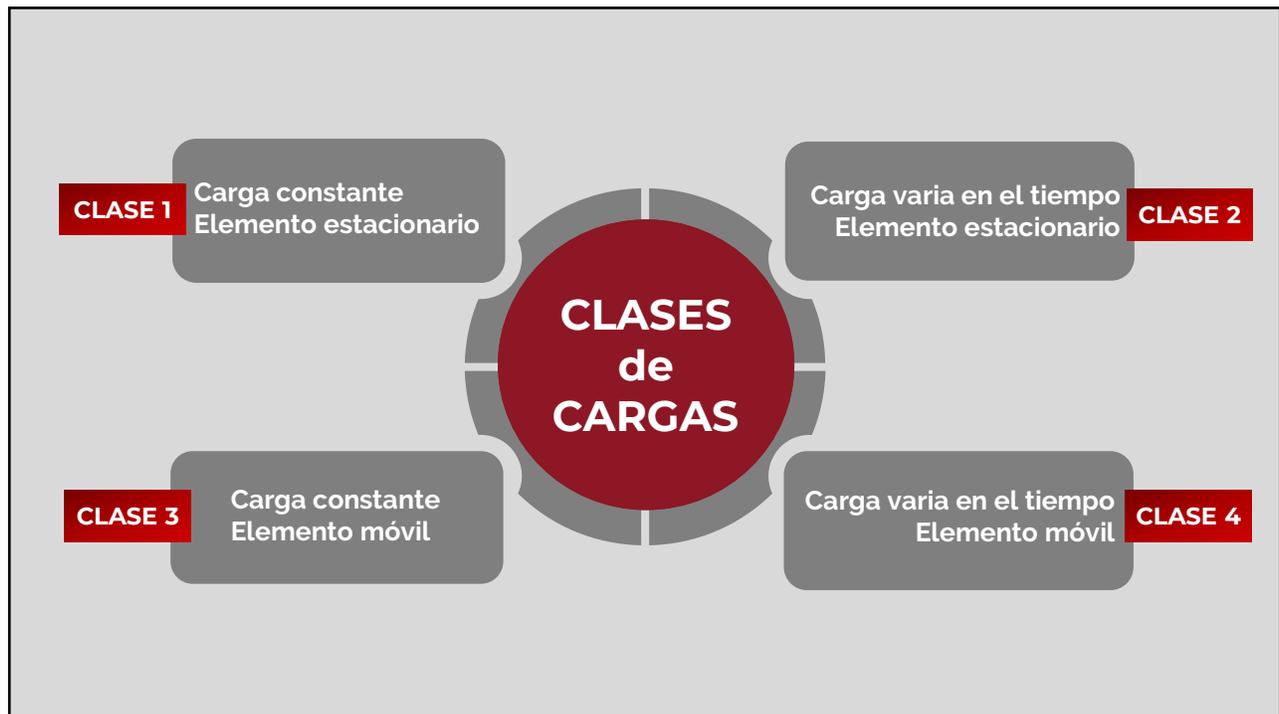


Capítulo IV

Análisis y determinación de cargas



1



2

Análisis y determinación de cargas

Clases de cargas

CLASE 1

Cargas constantes en elementos estacionarios

Solo se requiere un análisis de cargas estáticas.

Ej.: prensa de husillo



3

Análisis y determinación de cargas

Clases de cargas

CLASE 2 Cargas variables en elementos estacionarios

Se necesita un análisis de cargas dinámicas

Ej.: puente sujeto a cargas variables de los vehículos y afectación del viento en su estructura



4

Análisis y determinación de cargas

Clases de cargas



CLASE 3

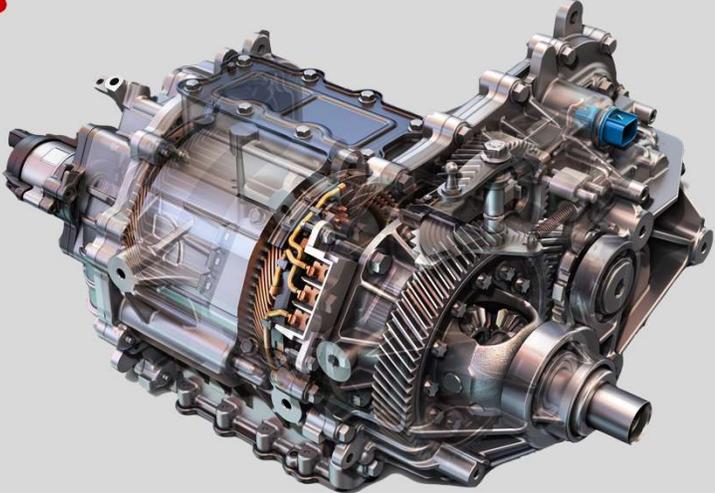
Sistema en movimiento con cargas constantes

Cargas externas constantes, la aceleración significativa de los miembros pueden crear fuerzas de reacción que varían con el tiempo: análisis de cargas dinámicas. Ej.: cortadora de césped

5

Análisis y determinación de cargas

Clases de cargas



CLASE 4

Cargas variables en elementos móviles

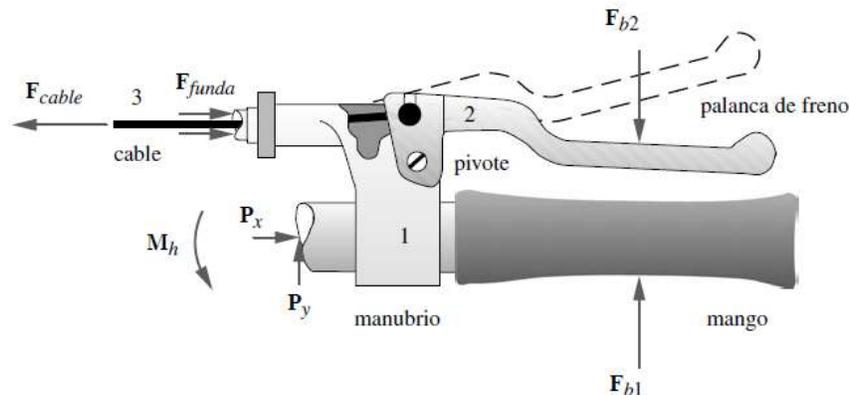
La mayoría de máquinas existentes
Ej.: el motor de un automóvil

6

Análisis y determinación de cargas

Diagramas de cuerpo libre

DCL para identificar fuerzas y momentos potenciales sobre cada miembro de un sistema



7

Análisis y determinación de cargas

Diagramas de cuerpo libre

DCL es el medio para descomponer un problema complicado en segmentos manejables. El uso de DCL sirve para:

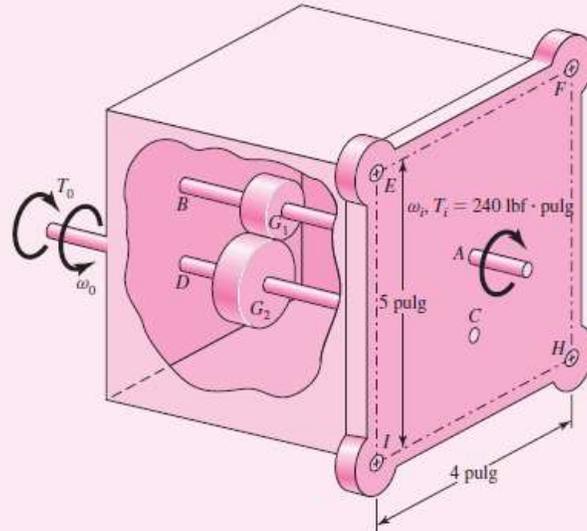
- Establecer direcciones de ejes de referencia
- Simplifica el análisis
- Ayuda a comunicar las ideas claramente
- Clarifica las ideas confusas, resalta puntos no obvios
- Planear el análisis del problema. Establecer relaciones matemáticas
- Registrar el avance del proceso de solución
- Permitir que otros comprendan nuestro razonamiento

8

Análisis y determinación de cargas

Diagramas de cuerpo libre

Ejemplo

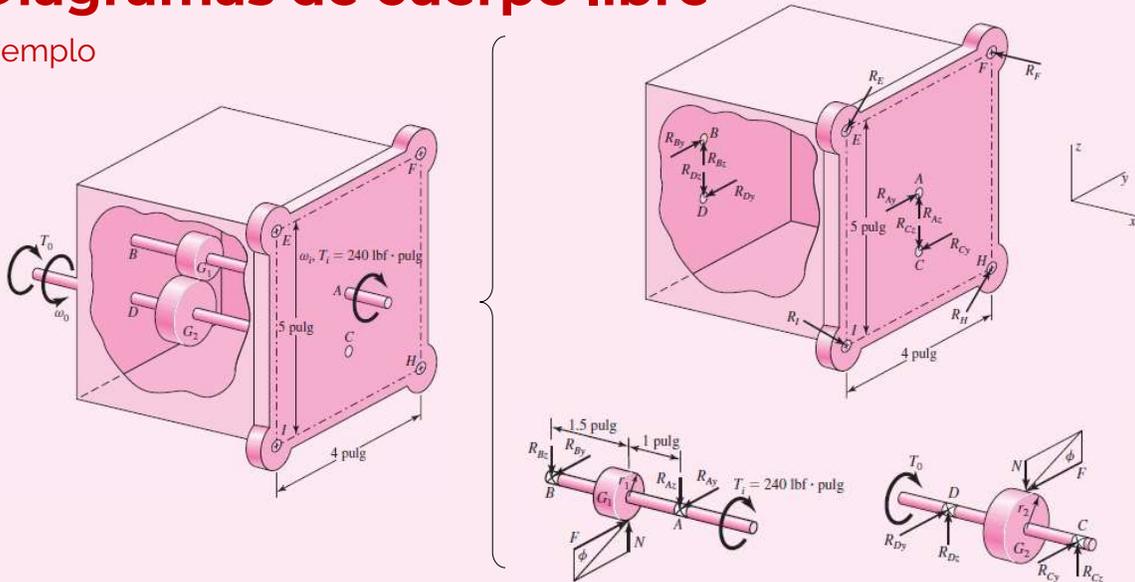


9

Análisis y determinación de cargas

Diagramas de cuerpo libre

Ejemplo



10

Análisis y determinación de cargas

Diagramas de cuerpo libre**Primera ley de Newton**

Un cuerpo en reposo tiende a permanecer en reposo mientras un cuerpo en movimiento a velocidad constante y en línea recta tenderá a mantener esa velocidad, a menos que actúe sobre él una fuerza externa

Segunda ley de Newton

La razón temporal del momento de un cuerpo es igual a la magnitud de la fuerza aplicada, y actúa en dirección de la fuerza

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad \Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$$

$\dot{\mathbf{H}}_G$ La razón de tiempo del cambio del momento (*momentum*) o el momento angular con respecto al centro de gravedad

11

Análisis y determinación de cargas

Diagramas de cuerpo libre

La ecuación vectorial se puede escribir como tres ecuaciones escalares:

$$\Sigma F_x = ma_x \quad \Sigma F_y = ma_y \quad \Sigma F_z = ma_z$$

$$\mathbf{H}_G = I_x \omega_x \hat{\mathbf{i}} + I_y \omega_y \hat{\mathbf{j}} + I_z \omega_z \hat{\mathbf{k}} \quad \left. \begin{array}{l} I_x \\ I_y \\ I_z \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Principales momentos de inercia} \\ \text{centroidales de la masa (segundos} \\ \text{momentos de masa)} \end{array}$$

$$\Sigma M_x = I_x \alpha_x - (I_y - I_z) \omega_y \omega_z$$

$$\Sigma M_y = I_y \alpha_y - (I_z - I_x) \omega_z \omega_x$$

$$\Sigma M_z = I_z \alpha_z - (I_x - I_y) \omega_x \omega_y$$

12

Análisis y determinación de cargas

Diagramas de cuerpo libre

Tercera ley de Newton

Cuando dos partículas interactúan, en el punto de contacto habrá dos fuerzas de reacción. Estas dos fuerzas tendrán la misma magnitud y actuarán a lo largo de la misma línea de dirección pero con sentidos opuestos.

Análisis de cargas estáticas

$$\Sigma F_{x,y,z} = 0$$

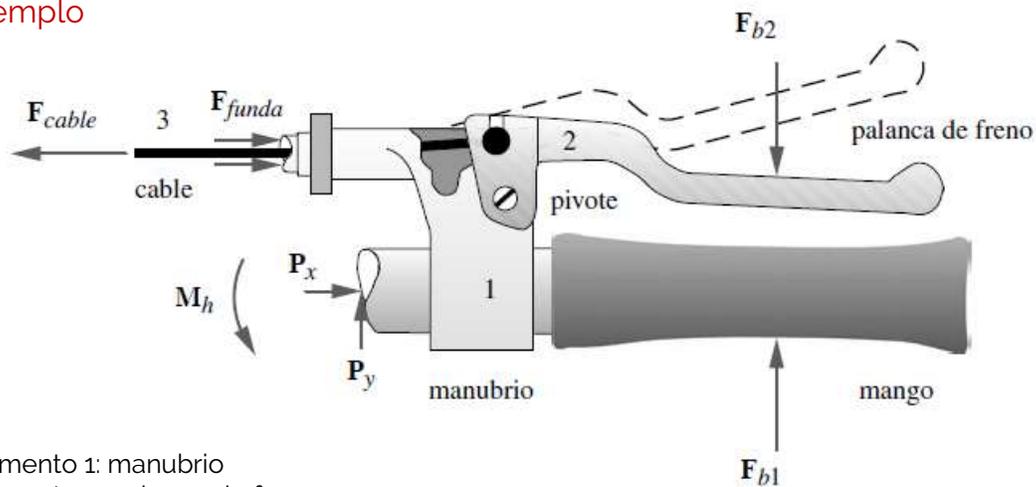
$$\Sigma M_{x,y,z} = 0$$

13

Análisis y determinación de cargas

Diagramas de cuerpo libre

Ejemplo



Elemento 1: manubrio
 Elemento 2: palanca de freno
 Elemento 3: cable

14

Análisis y determinación de cargas

Diagramas de cuerpo libre

Ejemplo

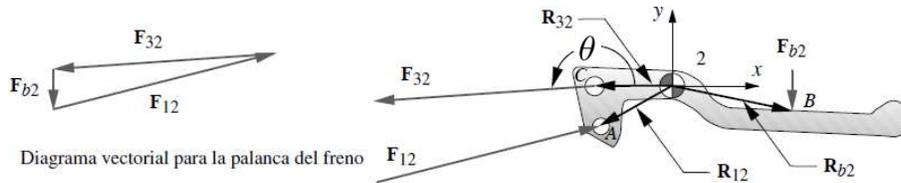


Diagrama vectorial para la palanca del freno

F_{12} Fuerza que ejerce el elemento 1 (manubrio) sobre el elemento 2 (palanca)

F_{32} Fuerza que ejerce el elemento 3 (cable) sobre el elemento 2 (palanca)

F_{b2} Fuerza que ejerce la mano

R_{32}
 R_{12}
 R_{b2}

} Vectores de posición de las fuerzas respectivas (para cálculo de momentos)

15

Análisis y determinación de cargas

Diagramas de cuerpo libre

Ejemplo

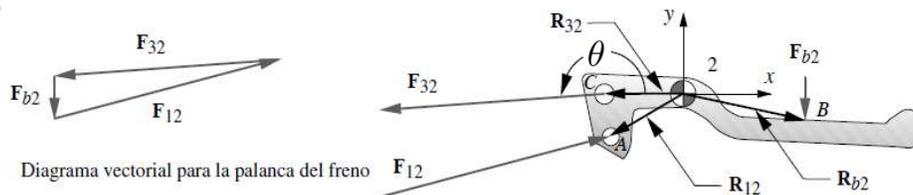


Diagrama vectorial para la palanca del freno

$$\Sigma F_x = F_{12x} + F_{b2x} + F_{32x} = 0$$

$$\Sigma F_y = F_{12y} + F_{b2y} + F_{32y} = 0$$

$$\Sigma M_z = (\mathbf{R}_{12} \times \mathbf{F}_{12}) + (\mathbf{R}_{b2} \times \mathbf{F}_{b2}) + (\mathbf{R}_{32} \times \mathbf{F}_{32}) = 0$$

$$\Sigma M_z = (R_{12x}F_{12y} - R_{12y}F_{12x}) + (R_{b2x}F_{b2y} - R_{b2y}F_{b2x}) + (R_{32x}F_{32y} - R_{32y}F_{32x}) = 0$$

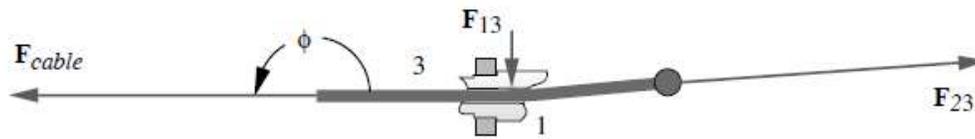
3 ecuaciones, 4 incógnitas $F_{12x}, F_{12y}, F_{32x}, F_{32y} \longrightarrow F_{32y} = F_{32x} \tan \theta$

16

Análisis y determinación de cargas

Diagramas de cuerpo libre

Ejemplo



F_{13} Fuerza que ejerce el elemento 1 (manubrio) sobre el elemento 3 (cable)

F_{23} Fuerza que ejerce el elemento 2 (palanca) sobre el elemento 3 (cable)

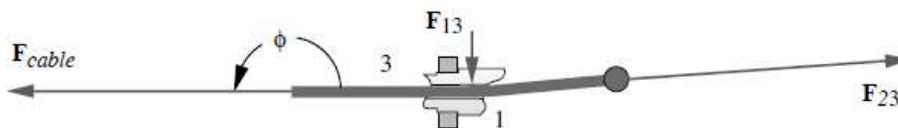
F_{cable} Fuerza que ejerce el elemento 3 (cable) sobre el elemento 2 (palanca)

17

Análisis y determinación de cargas

Diagramas de cuerpo libre

Ejemplo



Se asume sin fricción

$$\Sigma F_x = F_{cable_x} + F_{13x} + F_{23x} = 0$$

$$\Sigma F_y = F_{cable_y} + F_{13y} + F_{23y} = 0$$

Fuerzas concurrentes: no hay momento

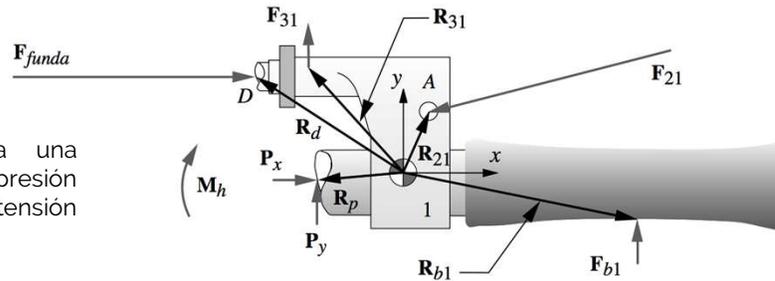
18

Análisis y determinación de cargas

Diagramas de cuerpo libre

Ejemplo

La funda brinda una fuerza de compresión para equilibrar la tensión en el cable



$$\Sigma F_x = F_{21x} + F_{b1x} + F_{31x} + P_x + F_{funda_x} = 0$$

$$\Sigma F_y = F_{21y} + F_{b1y} + F_{31y} + P_y = 0$$

$$\Sigma M_z = M_h + (\mathbf{R}_{21} \times \mathbf{F}_{21}) + (\mathbf{R}_{b1} \times \mathbf{F}_{b1}) + (\mathbf{R}_{31} \times \mathbf{F}_{31}) + (\mathbf{R}_p \times \mathbf{P}) + (\mathbf{R}_d \times \mathbf{F}_{funda}) = 0$$

$$\Sigma M_z = M_h + (R_{21x}F_{21y} - R_{21y}F_{21x}) + (R_{b1x}F_{b1y} - R_{b1y}F_{b1x})$$

$$+ (R_{31x}F_{31y} - R_{31y}F_{31x}) + (R_{P_x}P_y - R_{P_y}P_x) + (R_{d_x}F_{funda_y} - R_{d_y}F_{funda_x}) = 0$$

19

Análisis y determinación de cargas

Diagramas de cuerpo libre

Ejemplo

21 incógnitas - 9 ecuaciones

$$F_{b1x}, F_{b1y}, F_{12x}, F_{12y}, F_{21x}, F_{21y},$$

$$F_{32x}, F_{32y}, F_{23x}, F_{23y}, F_{13x}, F_{13y},$$

$$F_{31x}, F_{31y}, F_{cable_x}, F_{cable_y}, F_{funda_x},$$

$$F_{funda_y}, P_x, P_y, M_h$$

20

Análisis y determinación de cargas

Diagramas de cuerpo libre

Ejemplo

$$F_{23x} = -F_{32x}$$

$$F_{23y} = -F_{32y}$$

$$F_{21x} = -F_{12x}$$

$$F_{21y} = -F_{12y}$$

$$F_{31x} = -F_{13x}$$

$$F_{31y} = -F_{13y}$$

$$F_{\text{funda}_x} = -F_{\text{cable}_x}$$

$$F_{b1x} = -F_{b2x}$$

$$F_{b1y} = -F_{b2y}$$

$$F_{\text{cable}_y} = 0$$

$$F_{\text{funda}_y} = 0$$

$$F_{31x} = 0$$

21 incógnitas - 21 ecuaciones

Tabla 1-2 - parte 1
Estudio de caso 1A
Datos conocidos

| Variable | Valor | Unidad |
|-----------|--------|--------|
| F_{13x} | 0.0 | N |
| F_{b2x} | 0.0 | N |
| F_{b2y} | -267.0 | N |
| θ | 184.0 | grad |
| ϕ | 180.0 | grad |
| R_{b2x} | 39.39 | mm |
| R_{b2y} | 2.07 | mm |
| R_{32x} | -50.91 | mm |
| R_{32y} | 4.66 | mm |
| R_{12x} | -47.91 | mm |
| R_{12y} | -7.34 | mm |
| R_{21x} | 7.0 | mm |
| R_{21y} | 19.0 | mm |
| R_{b1x} | 47.5 | mm |
| R_{b1y} | -14.0 | mm |
| R_{31x} | -27.0 | mm |
| R_{31y} | 30.0 | mm |
| R_{px} | -27.0 | mm |
| R_{py} | 0.0 | mm |
| R_{dx} | -41.0 | mm |
| R_{dy} | 27.0 | mm |

21

Capítulo IV

Análisis y determinación de cargas

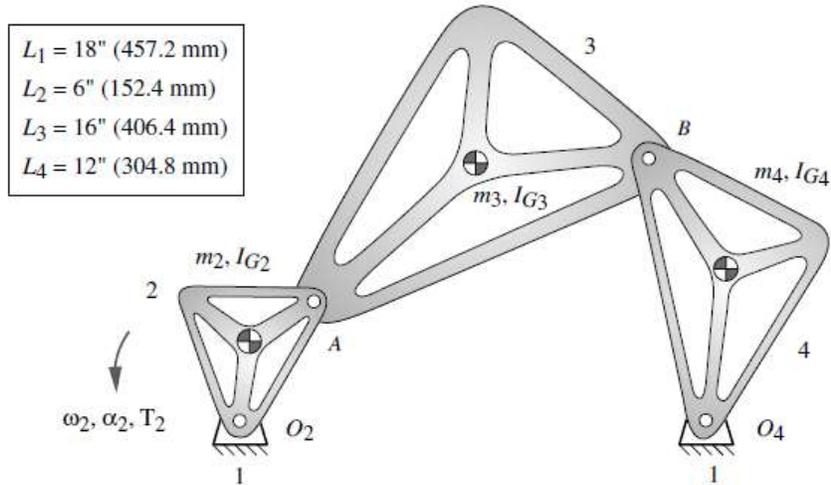
Cargas Dinámicas

22

Análisis y determinación de cargas

Cargas dinámicas

Ejemplo

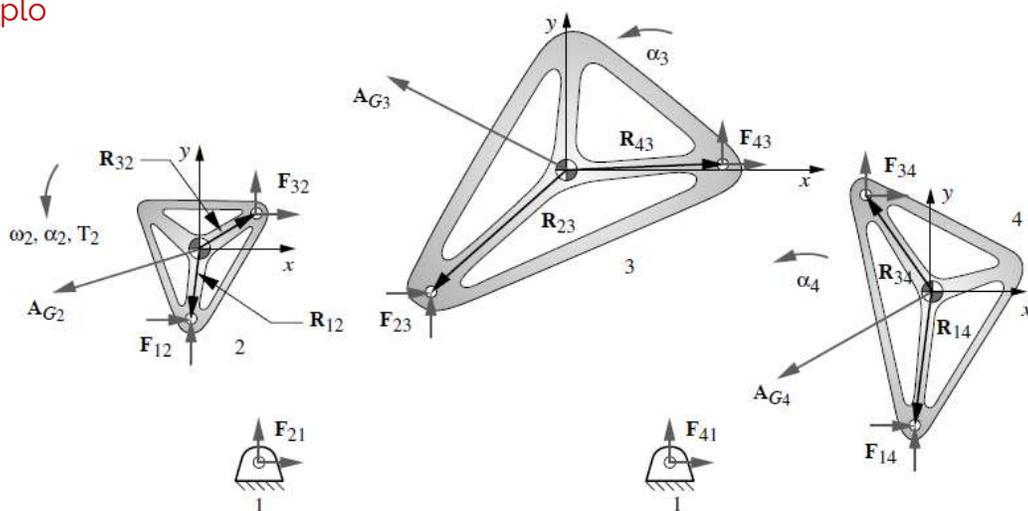


23

Análisis y determinación de cargas

Cargas dinámicas

Ejemplo



24

Análisis y determinación de cargas

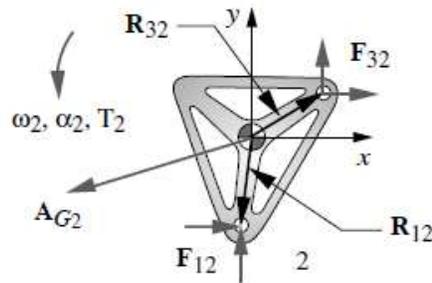
Cargas dinámicas

Ejemplo

$$\Sigma F_x = F_{12x} + F_{32x} = m_2 A_{G2x}$$

$$\Sigma F_y = F_{12y} + F_{32y} = m_2 A_{G2y}$$

$$\Sigma M_z = T_2 + (R_{12x} F_{12y} - R_{12y} F_{12x}) + (R_{32x} F_{32y} - R_{32y} F_{32x}) = I_{G2} \alpha_2$$



25

Análisis y determinación de cargas

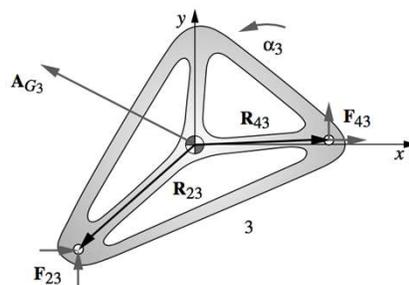
Cargas dinámicas

Ejemplo

$$\Sigma F_x = F_{23x} + F_{43x} = m_3 A_{G3x}$$

$$\Sigma F_y = F_{23y} + F_{43y} = m_3 A_{G3y}$$

$$\Sigma M_z = (R_{23x} F_{23y} - R_{23y} F_{23x}) + (R_{43x} F_{43y} - R_{43y} F_{43x}) = I_{G3} \alpha_3$$



26

Análisis y determinación de cargas

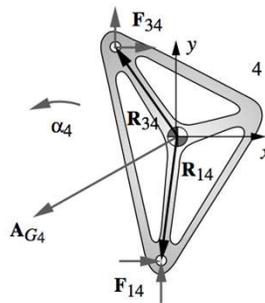
Cargas dinámicas

Ejemplo

$$\Sigma F_x = F_{14x} + F_{34x} = m_4 A_{G4x}$$

$$\Sigma F_y = F_{14y} + F_{34y} = m_4 A_{G4y}$$

$$\Sigma M_z = (R_{14x} F_{14y} - R_{14y} F_{14x}) + (R_{34x} F_{34y} - R_{34y} F_{34x}) = I_{G4} \alpha_4$$



27

Análisis y determinación de cargas

Cargas dinámicas

Ejemplo

13 incógnitas - 9 ecuaciones

$$F_{12x}, F_{12y}, F_{32x}, F_{32y}, F_{23x},$$

$$F_{23y}, F_{43x}, F_{43y}, F_{14x}, F_{14y},$$

$$F_{34x}, F_{34y}, T_2$$

28

Análisis y determinación de cargas

Cargas dinámicas

Ejemplo

$$F_{32x} = -F_{23x}$$

$$F_{32y} = -F_{23y}$$

$$F_{34x} = -F_{43x}$$

$$F_{34y} = -F_{43y}$$

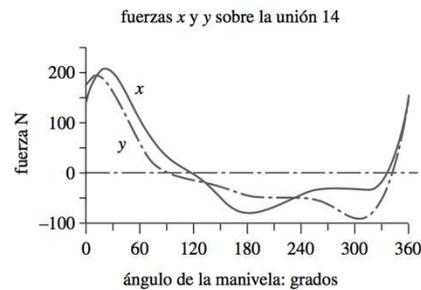
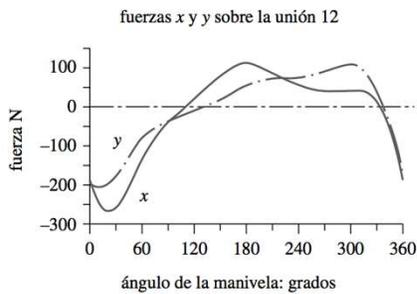


Tabla 1-6 - parte 2

Estudio de caso 5A
Datos calculados

| Variable | Valor | Unidad |
|------------|--------|----------------------|
| F_{12x} | -255.8 | N |
| F_{12y} | -178.1 | N |
| F_{32x} | 252.0 | N |
| F_{32y} | 172.2 | N |
| F_{34x} | -215.6 | N |
| F_{34y} | -163.9 | N |
| F_{14x} | 201.0 | N |
| F_{14y} | 167.0 | N |
| F_{43x} | 215.6 | N |
| F_{43y} | 163.9 | N |
| F_{23x} | -252.0 | N |
| F_{23y} | -172.2 | N |
| T_{12} | -3.55 | N-m |
| α_3 | 56.7 | rad/seg ² |
| α_4 | 138.0 | rad/seg ² |
| A_{cg2x} | -7.4 | rad/seg ² |
| A_{cg2y} | -11.3 | rad/seg ² |
| A_{cg3x} | -34.6 | rad/seg ² |
| A_{cg3y} | -7.9 | rad/seg ² |
| A_{cg4x} | -13.9 | rad/seg ² |
| A_{cg4y} | 2.9 | rad/seg ² |

29

Capítulo IV

Análisis y determinación de cargas

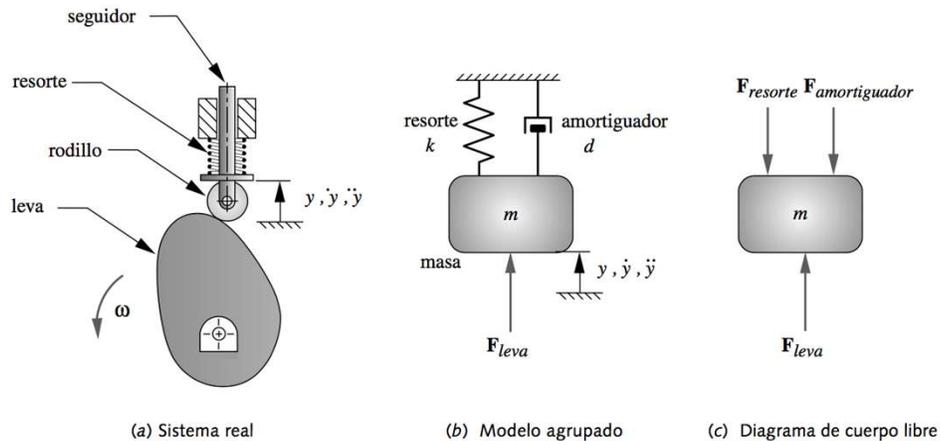
Cargas por vibración

30

Análisis y determinación de cargas

Cargas por vibración

- Las cargas por vibración siempre aparecen en un sistema.
- Son producto de la elasticidad que todos los materiales tienen: modelo del resorte



31

Análisis y determinación de cargas

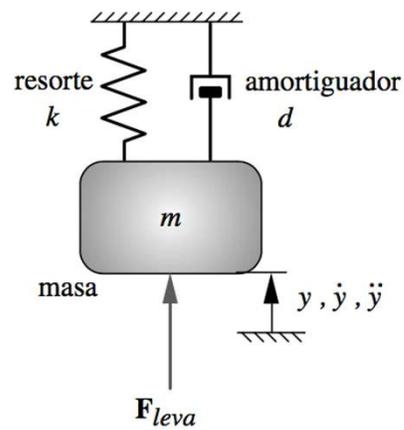
Cargas por vibración

Frecuencia natural

Frecuencia a la que un sistema seguirá vibrando si se quita la excitación

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}} \right]$$

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \omega_n \quad [\text{Hz}]$$



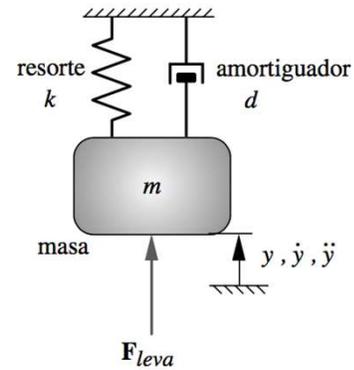
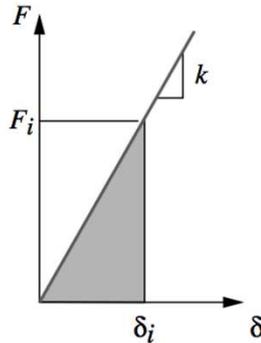
32

Análisis y determinación de cargas

Cargas por vibración**Constante del resorte**

Relación entre fuerza aplicada y deflexión

$$k = \frac{F}{\delta} = \frac{F_i}{y}$$



33

Análisis y determinación de cargas

Cargas por vibración**Amortiguamiento**

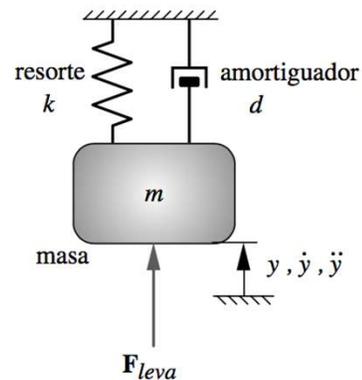
Pérdidas por amortiguación o fricción.

$$d = \frac{F}{\dot{y}}$$

$$\omega_d = \sqrt{\frac{K}{m} - \left(\frac{d}{2m}\right)^2}$$

$$f_d = \frac{1}{2\pi} \omega_d$$

$$\omega_d < \omega_n$$



34

Análisis y determinación de cargas

Cargas por vibración

Resonancia

La frecuencia de operación o de impulso aplicada es igual a cualquiera de sus frecuencias naturales.

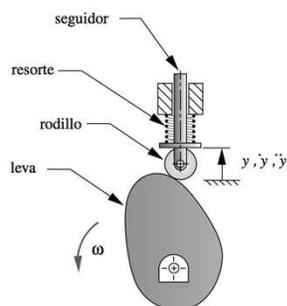
La velocidad angular de entrada es igual, o cercana, a ω_n

La respuesta vibratoria será elevada = fuerzas grandes = falla del sistema.

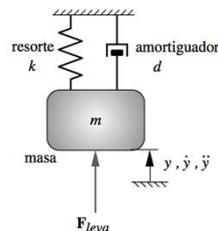
35

Análisis y determinación de cargas

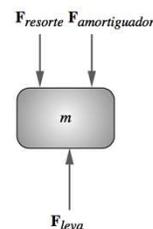
Cargas por vibración: Fuerzas dinámicas



(a) Sistema real



(b) Modelo agrupado



(c) Diagrama de cuerpo libre

$$\Sigma F_y = ma = m\ddot{y}$$

$$F_{leva} - F_{resorte} - F_{amortiguador} = m\ddot{y}$$

$$F_{leva} = m\ddot{y} + d\dot{y} + ky$$

36

Capítulo IV

Análisis y determinación de cargas

Cargas por impacto

37

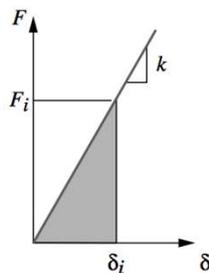
Análisis y determinación de cargas

Cargas por impacto

Si la carga se aplica con lentitud se considera estática; si se aplica con rapidez, entonces se considera como un impacto

Método de energía

Energía elástica almacenada en un cuerpo golpeado es el área bajo la curva F vs δ

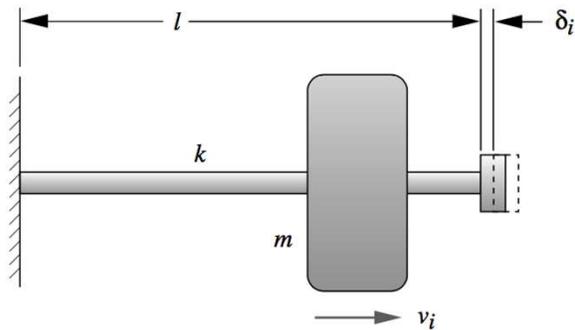


$$E = \frac{1}{2} F_i \delta_i$$

$$E = \frac{F_i^2}{2k} \quad \leftarrow k = \frac{F}{\delta}$$

38

Análisis y determinación de cargas

Cargas por vibración**Método de energía**

Energía cinética de la masa en movimiento aplicada a la masa golpeada en el punto de impacto

$$E = \eta \left[\frac{1}{2} m v_i^2 \right]$$

η Factor de corrección para tomar en consideración la disipación de la energía asociada con el tipo de elemento elástico que se golpea

39

Análisis y determinación de cargas

Cargas por vibración**Método de energía**

Suponiendo que toda la energía cinética se transforma en energía elástica:

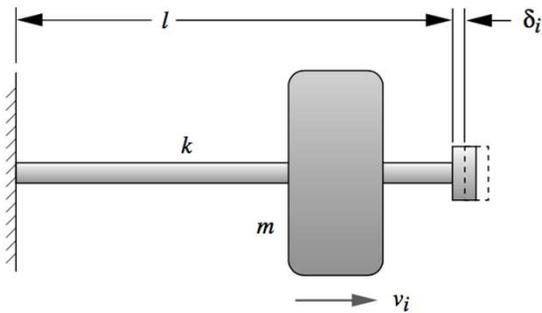
$$\frac{F_i^2}{2k} = \eta \frac{m v_i^2}{2}$$

$$F_i = v_i \sqrt{\eta m k}$$

Fuerza dinámica producida por el impacto

40

Análisis y determinación de cargas

Cargas por vibración**Método de energía**

$$\delta_{st} = \frac{W}{k} \quad \text{Deflexión estática en la varilla producto del peso de la masa } m$$

$$W = mg$$

Razón entre fuerza dinámica y fuerza estática

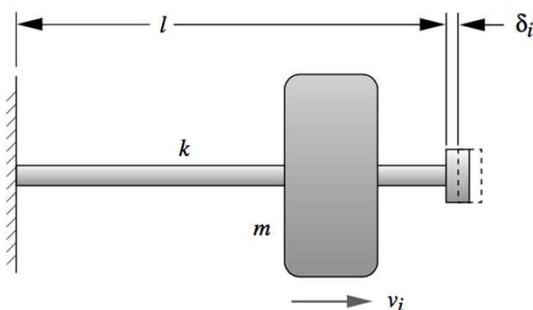
$$F_i = v_i \sqrt{\eta m k}$$

$$m = \frac{W}{g} \quad k = \frac{W}{\delta_{st}}$$

$$\frac{F_i}{W} = \frac{\delta_i}{\delta_{st}} = v_i \sqrt{\frac{\eta}{g \delta_{st}}}$$

41

Análisis y determinación de cargas

Cargas por vibración**Ejemplo**

$$m_{\text{varilla}} = 0.0617 \text{ Kg}$$

$$v_i = 1 \text{ m/s}$$

$$m = 1 \text{ Kg}$$

$$l = 100 \text{ mm}$$

$$E = 207 \text{ GPa}$$

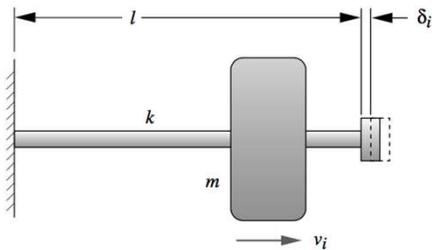
$$l/d = 10$$

$$F_i = ?$$

$$\delta_{st} = \frac{Wl}{AE} = \frac{9.81 \text{ N}(100 \text{ mm})}{78.54 \text{ mm}^2(2.075E5 \text{ N/mm}^2)} = 0.06 \text{ } \mu\text{m}$$

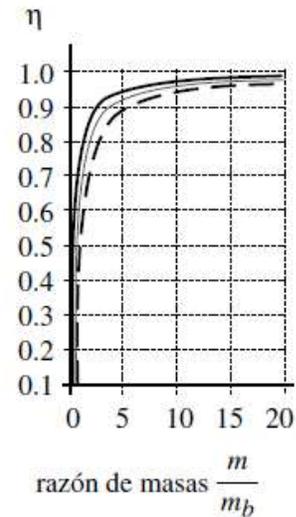
42

Análisis y determinación de cargas

Cargas por vibración**Ejemplo**

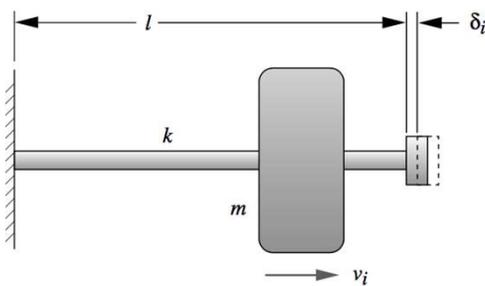
$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{m_b}{3m}} = \frac{1}{1 + \frac{0.0617}{3(1)}} = 0.98$$

A.H. Burr y J.B. Cheatham, *Mechanical Analysis and Design*, 2a. ed., Prentice-Hall: Englewood Cliffs, N.J., 1995, pp. 835-863.



43

Análisis y determinación de cargas

Cargas por vibración**Ejemplo**

$$\frac{F_i}{W} = v_i \sqrt{\frac{\eta}{g \delta_{st}}} = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sqrt{\frac{0.98}{9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (0.00006 \text{ m})}} = 1285.9$$

$$F_i = 1285.9(9.81 \text{ N}) = 12612 \text{ N}$$

44

Capítulo IV

Análisis y determinación de cargas

Ubicación de secciones críticas

45

Análisis y determinación de cargas

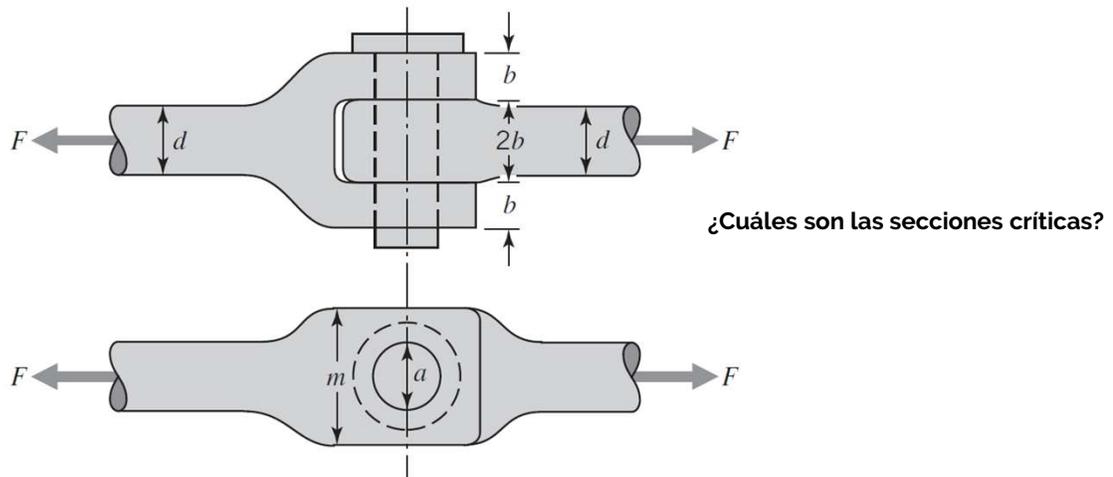
Ubicación de secciones críticas

En ocasiones, encontrar los puntos o secciones con la carga más crítica no es un proceso intuitivo

Se propone un procedimiento en el que se sigue las líneas de fuerza a lo largo de las partes de un ensamble para reconocer las secciones sospechosas de ser críticas.

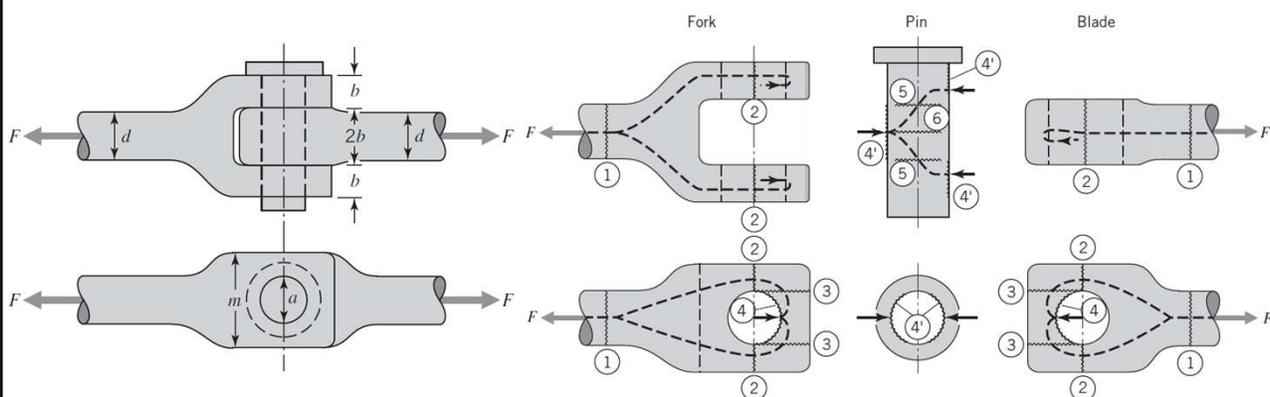
46

Análisis y determinación de cargas

Ubicación de secciones críticas**Ejemplo**

47

Análisis y determinación de cargas

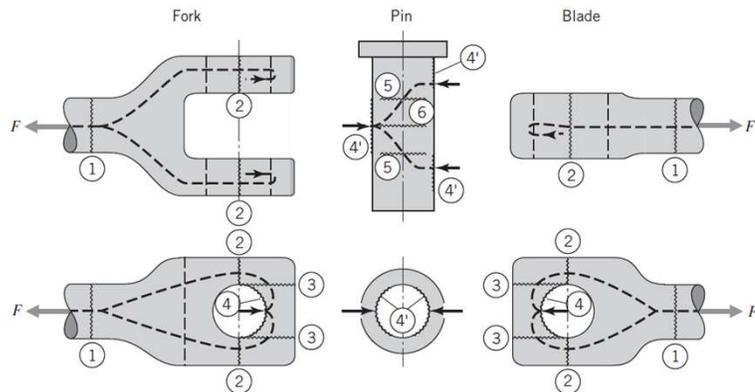
Ubicación de secciones críticas**Ejemplo**

48

Análisis y determinación de cargas

Ubicación de secciones críticas**Ejemplo**

La tensión empieza en la sección 1. Si las secciones de transición tienen amplio material y radios generosos, el siguiente punto crítico es 2 donde la fuerza encuentra un cuello de botella porque el área es reducida en los agujeros.

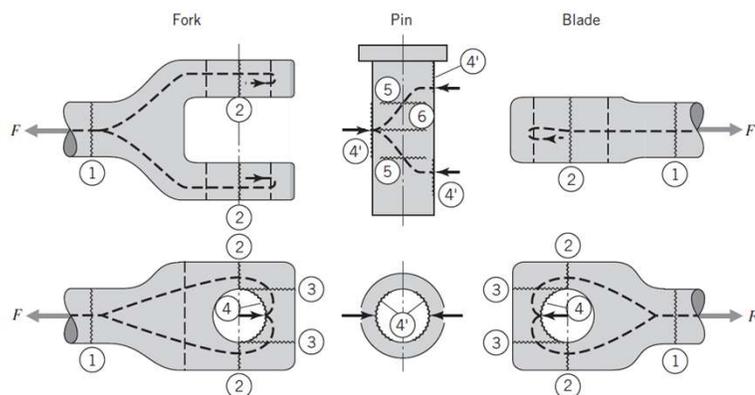


49

Análisis y determinación de cargas

Ubicación de secciones críticas**Ejemplo**

La siguiente sección cuestionable es 3, donde el trayecto de la fuerza está asociada al esfuerzo cortante que tiende a empujar.

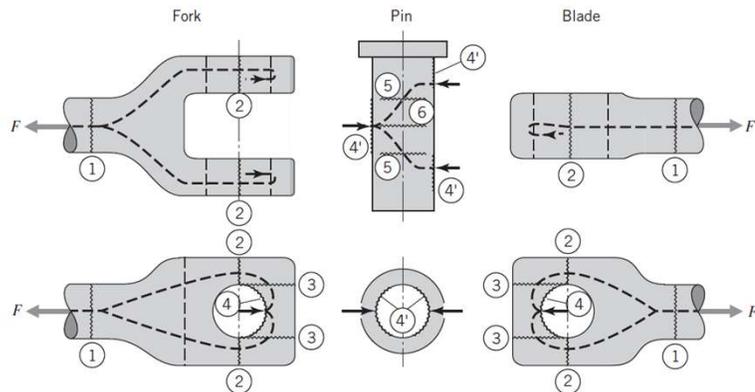


50

Análisis y determinación de cargas

Ubicación de secciones críticas**Ejemplo**

La siguiente área crítica es la interfaz 4 y 4' donde los rodamientos ejercen una carga entre la agarradera y el pin.

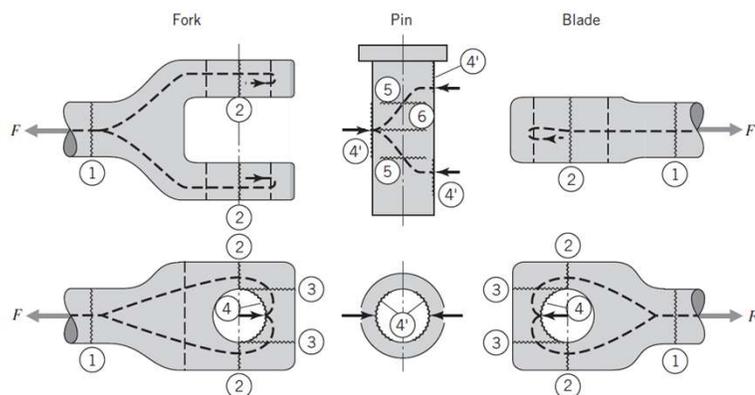


51

Análisis y determinación de cargas

Ubicación de secciones críticas**Ejemplo**

Las fuerzas en 4' cargan el pin como una viga causando secciones en cortante directo.

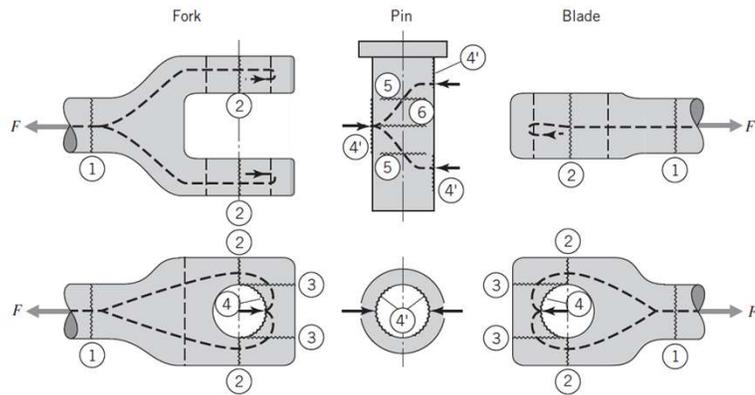


52

Análisis y determinación de cargas

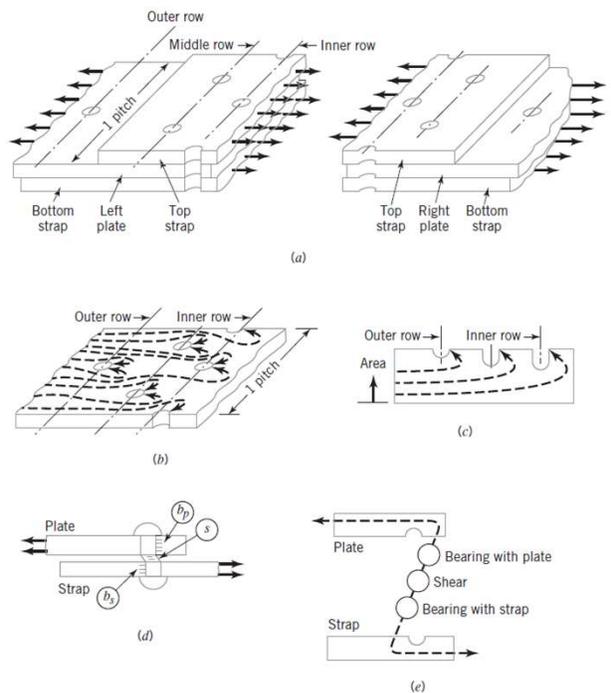
Ubicación de secciones críticas**Ejemplo**

Conforme las fuerzas salen del pin y siguen en la hoja (Blade) fluyen a través de las secciones críticas 4, 3, 2 y 1.



53

Análisis y determinación de cargas

Ubicación de secciones críticas

54

Capítulo IV

Análisis y determinación de cargas

Cargas en una viga

55

Análisis y determinación de cargas

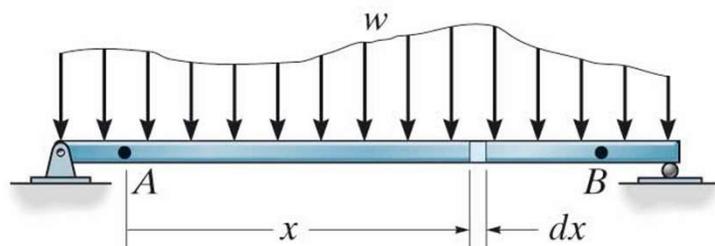
Cargas en una viga

Definición de viga

Elemento que soporta cargas transversales o axiales a lo largo de su eje longitudinal

Tipos de vigas y cargas en vigas

- Simplemente apoyada
- Viga en voladizo
- Viga suspendida
- Viga indeterminada

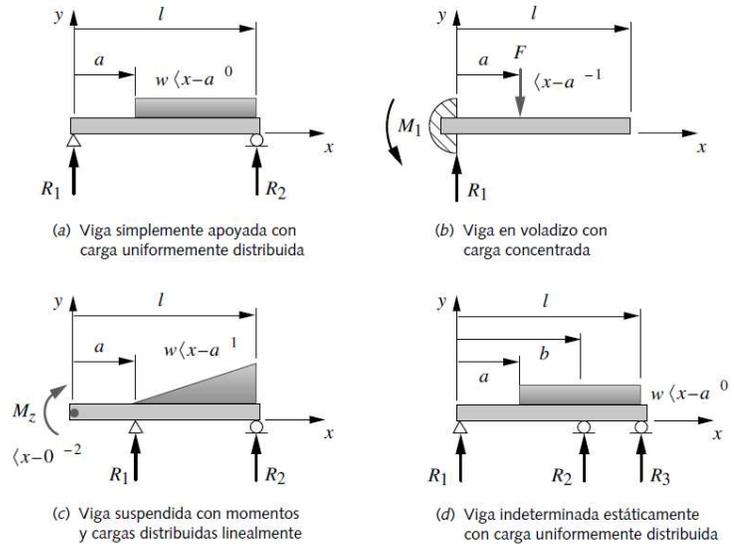


56

Análisis y determinación de cargas

Cargas en una viga

Tipos de vigas y cargas en vigas



57

Análisis y determinación de cargas

Cargas en una viga

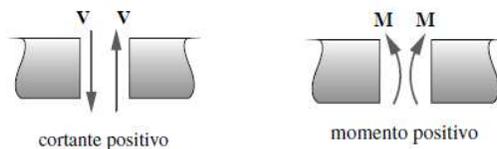
Cortante y momento

Función de carga (Intensidad de carga) \longrightarrow $q(x) = \frac{dV}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}$

Cortante \longrightarrow $\int_{V_A}^{V_B} dV = \int_{x_A}^{x_B} q dx = V_B - V_A$

Momento \longrightarrow $\int_{M_A}^{M_B} dM = \int_{x_A}^{x_B} V dx = M_B - M_A$

Convención de signos



58

Análisis y determinación de cargas

Cargas en una viga**Funciones de singularidad**

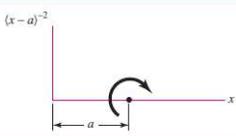
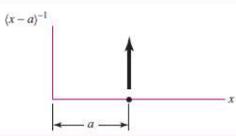
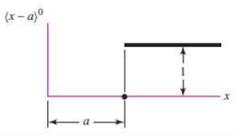
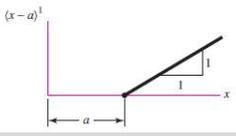
- Las cargas sobre las vigas se representan por conjuntos de entidades discretas (cargas) que son discontinuas
- Las F/S constituyen un medio útil y fácil para integrar a través de discontinuidades
- Permiten escribir expresiones generales de fuerza cortante y momento en vigas cargadas.

59

Análisis y determinación de cargas

Cargas en una viga**Funciones de singularidad**

- Se representan mediante un binomio en paréntesis angulares
- La primera cantidad es la variable de interés x
- La segunda cantidad es el parámetro definido por el usuario a
- a representa donde, en x , la función está actuando
- Son funciones tipo Impulso unitario
- El impulso unitario se evalúa hasta ∞ si $x = a$ y es igual a cero para cualquier otro valor de x

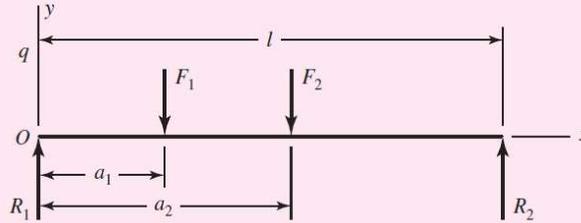
| Función | Gráfica de $f_n(x)$ | Significado |
|---------------------------------------|--|--|
| Momento concentrado (dipolo) |  | $(x-a)^{-2} = 0 \quad x \neq a$ $(x-a)^{-2} = \pm\infty \quad x = a$ $\int (x-a)^{-2} dx = (x-a)^{-1}$ |
| Fuerza concentrada (impulso unitario) |  | $(x-a)^{-1} = 0 \quad x \neq a$ $(x-a)^{-1} = +\infty \quad x = a$ $\int (x-a)^{-1} dx = (x-a)^0$ |
| Escalón unitario |  | $(x-a)^0 = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 & x \geq a \end{cases}$ $\int (x-a)^0 dx = (x-a)^1$ |
| Rampa |  | $(x-a)^1 = \begin{cases} 0 & x < a \\ x-a & x \geq a \end{cases}$ $\int (x-a)^1 dx = \frac{(x-a)^2}{2}$ |

60

Análisis y determinación de cargas

Cargas en una viga

Ejemplo



Función de carga

$$q = R_1 \langle x \rangle^{-1} - F_1 \langle x - a_1 \rangle^{-1} - F_2 \langle x - a_2 \rangle^{-1} + R_2 \langle x - l \rangle^{-1}$$

Fuerza cortante

$$V = \int q dx = R_1 \langle x \rangle^0 - F_1 \langle x - a_1 \rangle^0 - F_2 \langle x - a_2 \rangle^0 + R_2 \langle x - l \rangle^0$$

Momento flexionante

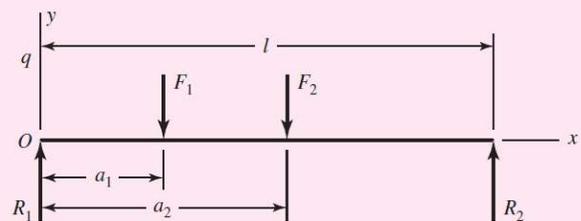
$$M = \int V dx = R_1 \langle x \rangle^1 - F_1 \langle x - a_1 \rangle^1 - F_2 \langle x - a_2 \rangle^1 + R_2 \langle x - l \rangle^1$$

61

Análisis y determinación de cargas

Cargas en una viga

Ejemplo



Las reacciones se pueden calcular con un DCL ó se pueden encontrar utilizando las funciones de singularidad definidas.

Recordar que V y M deben ser iguales a cero excepto en el intervalo

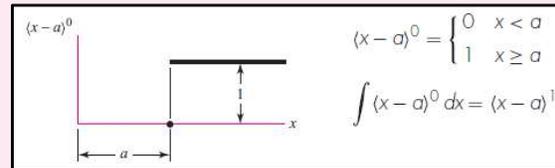
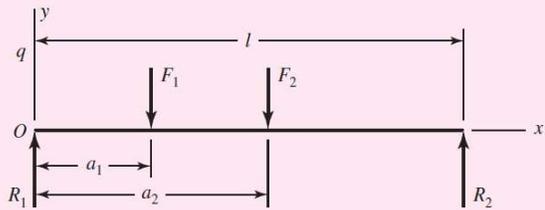
$$0 \leq x \leq l$$

62

Análisis y determinación de cargas

Cargas en una viga

Ejemplo



Por lo tanto, $V = 0$ si x es ligeramente mayor que l (recordar que las funciones de singularidad se derivan en una viga hipotéticamente infinita)

$$V = \int q dx = R_1 \langle l^+ \rangle^0 - F_1 \langle l^+ - a_1 \rangle^0 - F_2 \langle l^+ - a_2 \rangle^0 + R_2 \langle l^+ - l \rangle^0 = 0$$

$$\downarrow$$

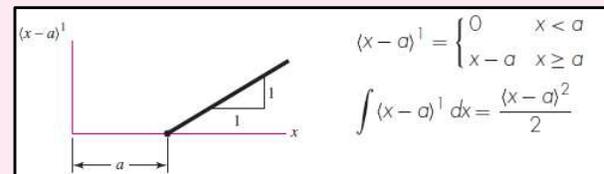
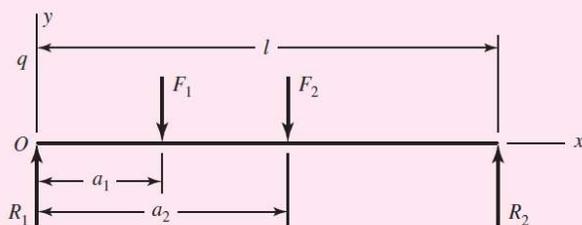
$$R_1 - F_1 - F_2 + R_2 = 0$$

63

Análisis y determinación de cargas

Cargas en una viga

Ejemplo



De igual forma, M debe ser cero en el mismo intervalo:

$$M = \int V dx = R_1 \langle l^+ \rangle^1 - F_1 \langle l^+ - a_1 \rangle^1 - F_2 \langle l^+ - a_2 \rangle^1 + R_2 \langle l^+ - l \rangle^1 = 0$$

$$\downarrow$$

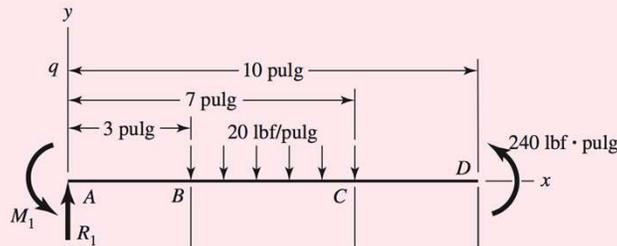
$$R_1 l - F_1 (l - a_1) - F_2 (l - a_2) = 0$$

64

Análisis y determinación de cargas

Cargas en una viga

Ejemplo



Función de carga

$$q = -M_1 \langle x \rangle^{-2} + R_1 \langle x \rangle^{-1} - 20 \langle x - 3 \rangle^0 + 20 \langle x - 7 \rangle^0 - 240 \langle x - 10 \rangle^{-2}$$

Fuerza cortante

$$V = -M_1 \langle x \rangle^{-1} + R_1 \langle x \rangle^0 - 20 \langle x - 3 \rangle^1 + 20 \langle x - 7 \rangle^1 - 240 \langle x - 10 \rangle^{-1}$$

Momento flexionante

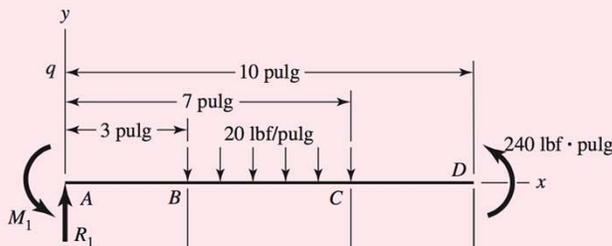
$$M = -M_1 \langle x \rangle^0 + R_1 \langle x \rangle^1 - 10 \langle x - 3 \rangle^2 + 10 \langle x - 7 \rangle^2 - 240 \langle x - 10 \rangle^0$$

65

Análisis y determinación de cargas

Cargas en una viga

Ejemplo



Las reacciones se determinan haciendo x un poco mayor a 10 pulgadas donde V y M son iguales a cero en esta región:

$$V = -M_1 \langle x \rangle^{-1} + R_1 \langle x \rangle^0 - 20 \langle x - 3 \rangle^1 + 20 \langle x - 7 \rangle^1 - 240 \langle x - 10 \rangle^{-1}$$

$$-M_1(0) + R_1(1) - 20(10 - 3) + 20(10 - 7) - 240(0) = 0$$

$$R_1 = 80 \text{ lbf}$$

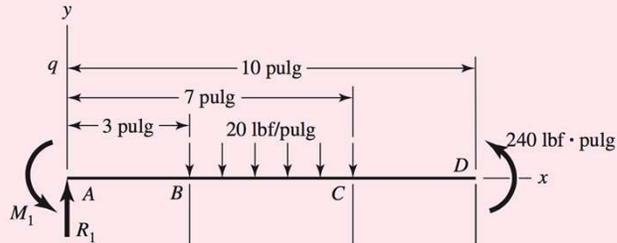
| | |
|--|--|
| | $(x-a)^{-2} = 0 \quad x \neq a$ $(x-a)^{-2} = \pm\infty \quad x = a$ $\int (x-a)^{-2} dx = (x-a)^{-1}$ |
| | $(x-a)^{-1} = 0 \quad x \neq a$ $(x-a)^{-1} = +\infty \quad x = a$ $\int (x-a)^{-1} dx = (x-a)^0$ |
| | $(x-a)^0 = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 & x \geq a \end{cases}$ $\int (x-a)^0 dx = (x-a)^1$ |
| | $(x-a)^1 = \begin{cases} 0 & x < a \\ x-a & x \geq a \end{cases}$ $\int (x-a)^1 dx = \frac{(x-a)^2}{2}$ |

66

Análisis y determinación de cargas

Cargas en una viga

Ejemplo



Las reacciones se determinan haciendo x un poco mayor a 10 pulgadas donde V y M son iguales a cero en esta región:

$$M = -M_1 \langle x \rangle^0 + R_1 \langle x \rangle^1 - 10 \langle x - 3 \rangle^2 + 10 \langle x - 7 \rangle^2 - 240 \langle x - 10 \rangle^0$$

$$-M_1(1) + 80(10) - 10(10 - 3)^2 + 10(10 - 7)^2 - 240(1) = 0$$

$$M_1 = 160 \text{ lbf}$$

