TAREA #2 cap11b DINÁMICA

Movimiento curvilíneo.
Movimiento de un proyectil.
Movimiento relativo

11.91 El movimiento de una partícula se define mediante las ecuaciones $x = t^2 - 8t + 7$ y $y = 0.5t^2 + 2t - 4$, donde x y y se expresan en metros y t en segundos. Determine *a*) la magnitud de la velocidad mínima alcanzada por la partícula, *b*) el tiempo, la posición y la dirección correspondientes a dicha velocidad.

(11.91) $x = t^2 - 8t + 7$ $\rightarrow$ $\vec{V} = \frac{d}{dt}(t^2 - 8t + 7, 0.5t^2 + 2t - 4)$

$y = 0.5t^2 + 2t - 4$ $\qquad \vec{V} = (2t - 8, t + 2)$

$|\vec{V}_{min}| \rightarrow |V| = \sqrt{4t^2 - 32t + 64 + t^2 + 4t + 4}$

$|V| = \sqrt{5t^2 - 28t + 68}$ (parábola cóncava arriba))

Analizando $f(t) = 5t^2 - 28t + 28$

$f'(t) = 10t - 28$

$f'(t_1) = 0 = 10t_1 - 28$

$t_1 = 2.8\,[s]$ (mínimo)

$|V|_{min} = \sqrt{f(2.8)} = 5.37\ m/s$ ⓐ

ⓑ $t_1 = 2.8\,[s]$

$\vec{r}(2.8) = (x(2.8), y(2.8)) = (14.68, 5.52)$

$\vec{V}(2.8) = (-2.4, 4.8)$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{4.8}{-2.4}\right) = -63.435°$

11.95 El movimiento tridimensional de una partícula se define mediante el vector de posición $\boldsymbol{r} = (Rt \cos \omega_n t)\mathbf{i} + ct\mathbf{j} + (Rt \operatorname{sen} \omega_n t)\mathbf{k}$. Determine las magnitudes de la velocidad y de la aceleración de la partícula. (La curva espacial que describe la partícula es una hélice cónica.)

11.95)

$$\vec{r}(t) = (Rt \cos \omega_n t,\ ct,\ Rt \operatorname{sen} \omega_n t)$$

$$\vec{V}(t) = (R[\cos(\omega_n t) - t\omega_n \operatorname{sen}(\omega_n t)],\ c,\ R[\operatorname{sen}(\omega_n t) + t\omega_n \cos(\omega_n t)])$$

$$|\vec{V}(t)| = \sqrt{R^2(\cos^2(\omega_n t) - \cancel{2\cos(\omega_n t)\, t\omega_n \operatorname{sen}(\omega_n t)} + t^2\omega_n^2 \operatorname{sen}^2(\omega_n t)) + c^2 + R^2(\operatorname{sen}^2(\omega_n t) + \cancel{2\operatorname{sen}(\omega_n t)\, t\omega_n \cos(\omega_n t)} + t^2\omega_n^2 \cos^2(\omega_n t))}$$

$$|\vec{V}(t)| = \sqrt{R^2[\cos^2(\omega_n t) + \operatorname{sen}^2(\omega_n t) + t^2\omega_n^2(\operatorname{sen}^2(\omega_n t) + \cos^2(\omega_n t))] + c^2}$$

$$= \sqrt{R^2[1 + t^2\omega_n^2] + c^2}$$

$$= \sqrt{R^2 + R^2\omega_n^2 t^2 + c^2} \quad [m/s]$$

$$\vec{a}(t) = (R[-\omega_n \operatorname{sen}(\omega_n t) - \omega_n(\operatorname{sen}(\omega_n t) + t\omega_n \cos(\omega_n t))],\ 0,\ R[\omega_n \cos(\omega_n t) + \omega_n(\cos(\omega_n t) - t\omega_n \operatorname{sen}(\omega_n t))])$$

$$= (R[-\omega_n \operatorname{sen}(\omega_n t) - \omega_n \operatorname{sen}(\omega_n t) - t\omega_n^2 \cos(\omega_n t)],\ 0,\ R[\omega_n \cos(\omega_n t) + \omega_n \cos(\omega_n t) - t\omega_n^2 \operatorname{sen}(\omega_n t)])$$

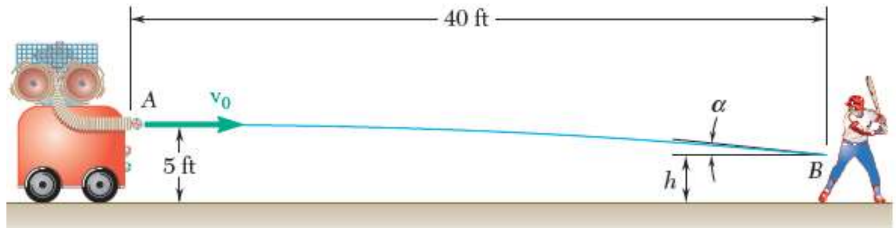
$$= (R[-2\omega_n \operatorname{sen}(\omega_n t) - t\omega_n^2 \cos(\omega_n t)],\ 0,\ R[2\omega_n \cos(\omega_n t) - t\omega_n^2 \operatorname{sen}(\omega_n t)])$$

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{R^2[4\omega_n^2 \operatorname{sen}^2(\omega_n t) + 4\omega_n^3 t \operatorname{sen}(\omega_n t)\cos(\omega_n t) + t^2\omega_n^4 \cos^2 \omega_n t + 4\omega_n^2 \cos^2(\omega_n t) - 4\omega_n^3 t \cos(\omega_n t)\operatorname{sen}(\omega_n t) + t^2\omega_n^4 \operatorname{sen}^2(\omega_n t)]}$$

$$= \sqrt{R^2[4\omega_n^2 + t^2\omega_n^4]}$$

$$= R\omega_n \sqrt{4 + t^2\omega_n^2} \quad [m/s^2]$$

11.100 Una máquina lanzadora "dispara" pelotas de béisbol con una velocidad horizontal $\mathbf{v}_0$. Si se sabe que la altura h varía entre 31 in. y 42 in., determine *a*) el rango de valores de v_0, *b*) los valores de α correspondientes a h = 31 in. y h = 42 in.



11.100) $31\ in \le h \le 42\ in$

$2.58\ ft \le h \le 3.5\ ft$

$2.42 \ge 5-h \ge 1.5\ ft$

$2.42 \ge 16.1t^2 \ge 1.5\ ft$

$0.15 \ge t^2 \ge 0.093$

$0.387 \ge t \ge 0.305$

a) $\Delta x = V_0 t = 40$

$V_0 = \frac{40}{t}$

$5-h = \frac{1}{2}32.2\,t^2$

$0.387 \ge \frac{40}{V_0} \ge 0.305$

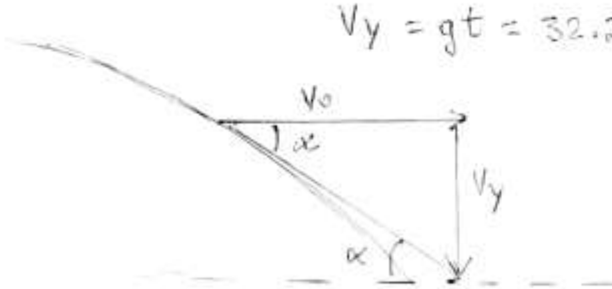
$V_0 \ge 103.36\ ft/s$

$V_0 \le 131.15\ ft/s$

$103.36\ ft/s \le V_0 \le 131.15\ ft/s$

b) Si $h = 2.58\ ft \rightarrow V_0 = 103.36\ ft/s$ (en x)

$V_y = gt = 32.2(0.387) = 12.46\ ft/s$ (en y)



$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{V_y}{V_0}\right) = 6.874°$

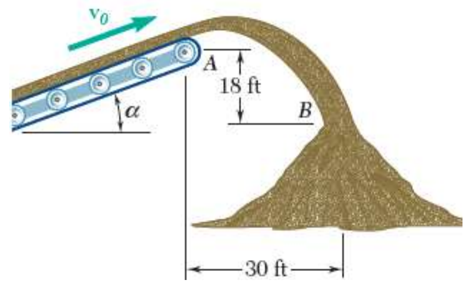
Si $h = 3.5\ ft \rightarrow V_0 = 131.15\ ft/s$

$V_y = 32.2(0.305) = 9.821\ ft/s$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{V_y}{V_0}\right) = 4.282°$

Santiago Zambrano Moreno

11.105 Mediante una banda transportadora se descarga arena en *A* y cae en la parte superior de un montículo en *B*. Si se sabe que la banda transportadora forma un ángulo α = 20° con la horizontal, determine la velocidad v_0 de la banda.



11.105) $(V_0)_x = V_0 \cos 20$

$(V_0)_y = V_0 \operatorname{sen} 20$

En x :

$30 = V_0 \cos 20\, t$

$t = \dfrac{30}{V_0 \cos 20}$

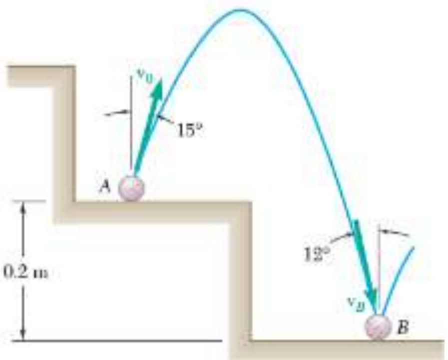
En y

$-18 = V_0 \operatorname{sen} 20\, t - \dfrac{32.2}{2} t^2$

$-18 = V_0 \operatorname{sen} 20 \left(\dfrac{30}{V_0 \cos 20}\right) - \dfrac{32.2}{2}\left(\dfrac{30^2}{V_0^2 \cos 20^2}\right)$

$-18 = 30 \tan 20 - \dfrac{16409.553}{V_0^2}$

$V_0 = 23.821 \text{ ft/s}$



11.110 Una pelota se deja caer sobre un escalón en el punto *A* y rebota con una velocidad $\mathbf{v}_0$ a un ángulo de 15° con la vertical. Determine el valor de v_0 si se sabe que justo antes de que la pelota rebote en el punto *B* su velocidad v_B forma un ángulo de 12° con la vertical.

11.110) En caída libre: $V = V_{o_1} + gt = V_{o_2}$

En parabólico $(V_x)_o = V_0 \operatorname{sen} 15$ $\qquad (V_x)_B = V_0 \operatorname{sen} 15 = V_B \operatorname{sen} 12$

$(V_y)_o = V_0 \cos 15$ $\qquad (V_y)_B = V_B \cos 12$

$$(V_B \cos 12)^2 = (V_0 \cos 15)^2 + 2(9.81)(0.2)$$

$$0.957 V_B^2 = 0.933 V_0^2 + 3.924$$

$$V_0 \operatorname{sen} 15 = V_B \operatorname{sen} 12$$

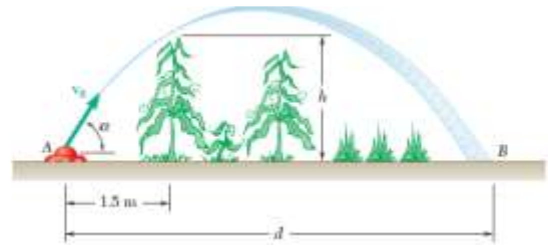
$$V_B = 1.245 V_0$$

$$0.957(1.245 V_0)^2 = 0.933 V_0^2 + 3.924$$

$$1.483 V_0^2 = 0.933 V_0^2 + 3.924$$

$$V_0 = 2.671 \text{ m/s}$$

11.115 Un rociador de jardín que descarga agua con una velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ de 8 m/s se usa para regar un jardín de vegetales. Determine la distancia d al punto B más lejano que será rociado y el ángulo α correspondiente cuando *a*) los vegetales apenas comienzan a crecer, *b*) la altura h de la planta de maíz es de 1.8 m.



11.115) $V_0 = 8\ m/s$, α

$d = 8\cos\alpha\, t'$ (en x)

$d = 8\cos\alpha\left(\frac{2(8)\operatorname{sen}\alpha}{g}\right)$

$$\boxed{d = \frac{64\operatorname{sen}(2\alpha)}{g}}$$

Máx en $\alpha = 45°$

$$\boxed{d_{máx} = 6.524\ [m]}$$ a)

$t' = 2t_{h_{máx}}$

$V_f^2 = V_{0y}^2 - 2g\Delta y = (8\operatorname{sen}\alpha)^2 - 2g\, h_{máx} = 0$

$\therefore h_{max} = \frac{(8\operatorname{sen}\alpha)^2}{2g}$

$h_{máx} = V_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{(8\operatorname{sen}\alpha)^2}{2g}$

$8\operatorname{sen}\alpha\, t - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{(8\operatorname{sen}\alpha)^2}{2g}$

$V_f = V_0\operatorname{sen}\alpha - gt$

$t_v = \frac{V_0\operatorname{sen}\alpha}{g} \Rightarrow t' = \frac{2V_0\operatorname{sen}\alpha}{g} = \frac{2(8\operatorname{sen}\alpha)}{g}$

b) $y = \tan\alpha\, x - \frac{g\, x^2}{2V_0^2\cos^2\alpha}$

$1.8 = 1.5\tan\alpha - \frac{9.81(1.5)^2}{2(8)^2\cos^2\alpha} = 1.5\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} - \frac{0.1724}{\cos^2\alpha}$

$1.8\cos^2\alpha = 1.5\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - 0.1724$

$1.8\cos^2\alpha = 0.75\operatorname{sen}(2\alpha) - 0.1724$

$0.75\operatorname{sen}(2\alpha) - 1.8\cos^2\alpha = 0.1724$

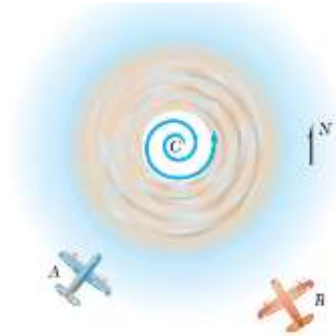
$\boxed{\alpha = 58.23°}$ (tabulando)

$d_{max} = 8\cos(58.23)\, t_v$

$d_{max} = \frac{64\operatorname{sen}(2\alpha)}{g} = \frac{64\operatorname{sen}(2(58.23))}{g}$

$$\boxed{d_{max} = 5.84\ [m]}$$

11.120 Los aviones A y B vuelan a la misma altura y rastrean el ojo del huracán C. La velocidad relativa de C con respecto a A es $\mathbf{v}_{C/A} = 235$ mi/h 75° y la velocidad relativa de C con respecto a B es $\mathbf{v}_{C/B} = 260$ mi/h 40°. Determine *a*) la velocidad relativa de B con respecto a A, *b*) la velocidad de A si el radar ubicado en tierra indica que el huracán se mueve con una rapidez de 24 mi/h rumbo al norte, *c*) el cambio en la posición de C con respecto a B durante un intervalo de 15 minutos.



11.120) $V_{C/A} = 235$ mi/h 75°

$V_{C/B} = 260$ mi/h 40°

a) $V_{B/A} \Rightarrow \vec{V}_{B/C} + \vec{V}_{C/A} = \vec{V}_{B/A}$

$-\vec{V}_{C/B} + \vec{V}_{C/A} = \vec{V}_{B/A}$

$\vec{V}_{B/A} = -(260\cos 40, -260\sin 40) + (-235\cos 75, -235\sin 75)$

$\vec{V}_{B/A} = (-259.99, -59.87)$

$\boxed{|V_{B/A}| = 266.79 \text{ mi/h}}$ $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \boxed{12.97°}$

b) $\vec{V}_{A/O}$, $\vec{V}_{C/O} = 24$ mi/h ↑, $\vec{V}_{C/A}$

$\vec{V}_{C/A} + \vec{V}_{A/O} = \vec{V}_{C/O}$

$\vec{V}_{A/O} = (0, 24) - (-235\cos 75, -235\sin 75)$

$\vec{V}_{A/O} = (60.82, 250.99)$

$\boxed{|\vec{V}_{A/O}| = 258.25 \text{ mi/h} \quad 76.38°}$

$\theta = 76.38$

c) $\vec{V}_{C/B} = (260\cos 40, -260\sin 40)$ mi/h

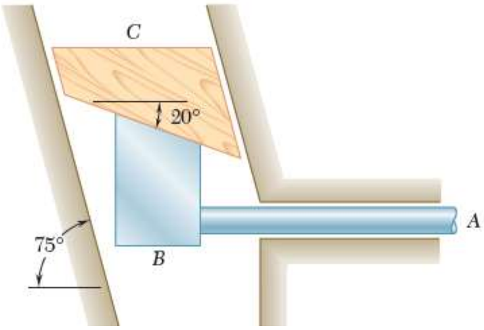
$\vec{r}_{C/B} = \vec{V}_{C/B} \cdot t = (199.17, -167.125)\ \text{mi/h} \cdot 15 \text{ min} \cdot \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}}$

$\vec{r}_{C/B} = (49.79, -41.78)$

$\boxed{|\vec{r}_{C/B}| = 64.99 \text{ mi} \quad 40°}$

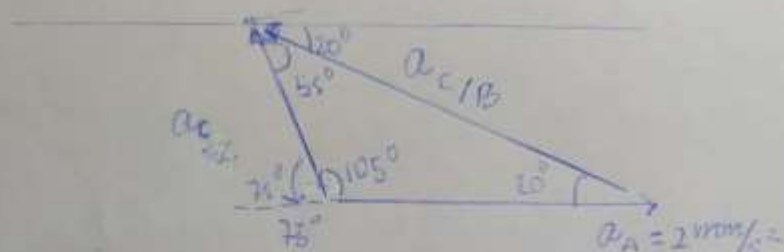
$\theta = 40°$

Santiago Zambrano Moreno



11.125 El ensamble de la barra A y la cuña B inicia su movimiento desde el reposo y se mueve hacia la derecha con una aceleración constante de 2 mm/s2. Determine a) la aceleración de la cuña C, b) la velocidad de la cuña C cuando t = 10 s.

11.125)



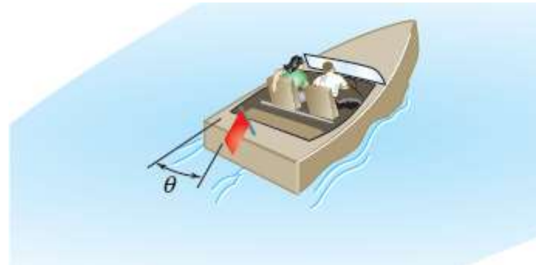
$$\frac{a_{C/B}}{\text{sen }105} = \frac{a_A}{\text{sen }55} = \frac{a_C}{\text{sen }20} \Rightarrow \frac{2}{\text{sen }55} = \frac{a_C}{\text{sen }20}$$

a) $\boxed{a_C = 0.835\ mm/s^2}$

b) $V = V_0 + at$

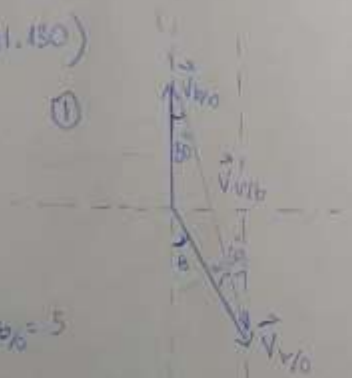
Para C $V = 0.835\ mm/s^2\ (10\ s) = \boxed{8.35\ mm/s}$

11.130 Cuando una pequeña lancha viaja hacia el norte a 5 km/h, una bandera montada sobre su popa forma un ángulo α = 50° con la línea central de la lancha en la forma que se indica en la figura. Un breve tiempo después, cuando el bote se desplaza hacia el este a 20 km/h, el ángulo α es otra vez de 50°. Determine la rapidez y la dirección del viento.

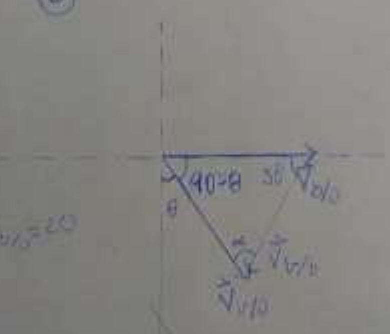


11.130)

① $V_{b/o} = 5$



② $V_{b/o} = 20$



$\alpha = 180 - 50 - (-\theta + 90)$

$\alpha = 130 + \theta - 90$

$= 40 + \theta$

$$\vec{V}_{v/b} + \vec{V}_{b/o} = \vec{V}_{v/o}$$

① $\dfrac{V_{v/o}}{\text{sen } 50} = \dfrac{V_{v/b}}{\text{sen}(180-\theta)} = \dfrac{V_{b/o}}{\text{sen}(\theta-50)}$

② $\dfrac{V_{v/o}}{\text{sen } 50} = \dfrac{V_{v/b}}{\text{sen}(90-\theta)} = \dfrac{V_{b/o}}{\text{sen}(40+\theta)}$

① $\dfrac{5}{\text{sen}(\theta-50)} = \dfrac{V_{v/o}}{\text{sen } 50}$

② $\dfrac{20}{\text{sen}(40+\theta)} = \dfrac{V_{v/o}}{\text{sen } 50}$

② y ① $\dfrac{\text{sen}(40+\theta)}{4\,\text{sen}(\theta-50)} = 1$

$\text{sen}(40+\theta) - 4\,\text{sen}(\theta-50) = 0$

tabulando $\theta = 64.05°$

Por tanto $V_{v/o} = 15.78$ km/h

R// $\begin{cases} \theta = 64.05 \quad \searrow \\ V_{v/o} = 15.78 \text{ km/h} \end{cases}$

Santiago Zambrano Moreno